Uitwerking Programmacorrectheid, 9 april 2010

Tijdsduur 3 uur. Gesloten boek.

Opgave 1 (20 %). Bepaal een geannoteerd commando S dat voldoet aan

$$
\begin{array}{l}
\textbf{var } i : \mathbb{Z} \\
\quad \{ \ P : \ i = X \ \} \\
S \\
\quad \{ \ Q : \ i \geq 5 \ \wedge \ (i = 5 - 2 \cdot X \ \vee \ i \textbf{ div } 3 = X) \ \} \ .
\end{array}
$$

Uitwerking.

$$
\begin{array}{l}
\quad \{ \ P : \ i = X \ \} \\
\textbf{if } \ i \leq 0 \ \textbf{ then} \\
\qquad \{ \ i = X \ \wedge \ i \leq 0 \ \} \\
\qquad\quad (* \ \text{rekenen} \ *) \\
\qquad \{ \ 5 - 2 \cdot i = 5 - 2 \cdot X \geq 5 \ \} \\
\quad i := 5 - 2 \cdot i \\
\qquad \{ \ i = 5 - 2 \cdot X \geq 5 \ \} \\
\qquad\quad (* \ \text{logica} \ *) \\
\qquad \{ \ Q : \ i \geq 5 \ \wedge \ (i = 5 - 2 \cdot X \ \vee \ i \textbf{ div } 3 = X) \ \} \\
\textbf{else} \\
\qquad \{ \ i = X \ \wedge \ i > 0 \ \} \\
\qquad\quad (* \ \text{rekenen} \ *) \\
\qquad \{ \ 3 \cdot i + 2 = 3 \cdot X + 2 \geq 5 \ \} \\
\quad i := 3 \cdot i + 2 \\
\qquad \{ \ i = 3 \cdot X + 2 \geq 5 \ \} \\
\qquad\quad (* \ \text{logica en rekenen} \ *) \\
\qquad \{ \ Q : \ i \geq 5 \ \wedge \ (i = 5 - 2 \cdot X \ \vee \ i \textbf{ div } 3 = X) \ \} \\
\textbf{end} \quad (* \ \text{verzamelen} \ *) \\
\quad \{ \ Q : \ i \geq 5 \ \wedge \ (i = 5 - 2 \cdot X \ \vee \ i \textbf{ div } 3 = X) \ \} \ .
\end{array}
$$

Opgave 2 (34 %). Bepaal een commando T dat voldoet aan de specificatie

$$
\begin{array}{l}
\textbf{const } n : \mathbb{N} \, , \quad a, b : \textbf{array } [0 \, . \, . \, n) \textbf{ of } \mathbb{R} \\
\textbf{var } x : \mathbb{R} \\
\quad \{ \ P : n \geq 1 \ \} \\
T \\
\quad \{ \ Q : x = \textbf{Max}(a[i] - b[j] \mid i, j : 0 \leq i \leq j < n) \ \} \ .
\end{array}
$$

De tijdscomplexiteit van commando T dient $\mathcal{O}(n)$ te zijn.
Bepaal eerst geschikte hulpfuncties en recurrente betrekkingen daarvoor.

Uitwerking. We passen variatie van constanten toe op de bovengrens n, en definiëren voor $k \geq 1$:

$$L(k) = \textbf{Max}(a[i] - b[j] \mid i, j : 0 \leq i \leq j < k) \ .$$

De gevraagde postconditie is dan $Q : \ x = L(n)$.

Er geldt $L(1) = a[0] - b[0]$ wegens de eenpuntsregel. Je kunt ook gebruik maken $L(0) = -\infty$ wegens leeg domein. Voor $k \geq 0$ geldt

$$
\begin{array}{ll}
 & L(k+1) \\
= & \{ \ j < k \text{ of } j = k\text{; splitsen; gebruik } k \geq 0 \ \} \\
 & L(k) \textbf{ max } \textbf{Max}(a[i] - b[k] \mid i : 0 \leq i \leq k) \\
= & \{ \ b[k] \text{ hangt niet van } i\text{, dit kan er dus uitgehaald worden } \} \\
 & L(k) \textbf{ max } (\textbf{Max}(a[i] \mid i : 0 \leq i < k+1) - b[k])
\end{array}
$$

$$\begin{array}{ll} = & \{ \text{ gebruik definitie van } E \text{ hieronder } \} \\ & L(k) \textbf{ max } (E(k+1) - b[k]) \ , \end{array}$$

waarbij

$$E(k) = \mathbf{Max}(a[i] \mid i : 0 \leq i < k) \ .$$

Er geldt $E(1) = a[0]$ wegens de eenpuntsregel (en $E(0) = -\infty$ wegens leeg domein). Voor $k \geq 0$ geldt

$$\begin{array}{ll} & E(k+1) \\ = & \{ \ i < k \text{ of } i = k\text{; splitsen; gebruik } k \geq 0 \ \} \\ & E(k) \textbf{ max } a[k] \ . \end{array}$$

We hebben aldus de recurrente betrekkingen:

$$\begin{array}{lll} k \geq 0 & \Rightarrow & L(k+1) = L(k) \textbf{ max } (E(k+1) - b[k]) \ , \\ k \geq 0 & \Rightarrow & E(k+1) = E(k) \textbf{ max } a[k] \ . \end{array}$$

Stap 1. We gebruiken variabelen $k : \mathbb{Z}$ en $y : \mathbb{R}$, en invariant en guard volgens

$$\begin{array}{ll} J : & 1 \leq k \leq n \ \wedge \ x = L(k) \ \wedge \ y = E(k) \ , \\ B : & k \neq n \ . \end{array}$$

Aan de bewijsverplichting $J \wedge \neg B \ \Rightarrow \ Q$ wordt voldaan wegens

$$\begin{array}{ll} & J \ \wedge \ \neg B \\ \Rightarrow & \{ \text{ definities van } J \text{ en } B\text{; weglaten irrelevante conjuncten } \} \\ & x = L(k) \ \wedge \ k = n \\ \Rightarrow & \{ \text{ invullen } \} \\ & Q : x = L(n) \ . \end{array}$$

Stap 2. Initialisatie.

$$\begin{array}{l} \quad \{ \ P : n \geq 1 \ \} \\ \qquad (* \ \text{zie boven} \ *) \\ \quad \{ \ 1 \leq 1 \leq n \ \wedge \ a[0] - b[0] = L(1) \ \wedge \ a[0] = E(1) \ \} \\ k := 1 \ ; \ x := a[0] - b[0] \ ; \ y := a[0] \\ \quad \{ \ J : \ 1 \leq k \leq n \ \wedge \ x = L(k) \ \wedge \ y = E(k) \ \} \ . \end{array}$$

Je kunt ook bij $k = 0$ beginnen. Er geldt $L(0) = E(0) = -\infty$ (maximum leeg domein). Als je $L(0) = 0$ of $E(0) = 0$ neemt, gaan de recurrente betrekkingen fout.

Stap 3. De voor de hand liggende keus is $vf = n - k$. Aan de bewijsverplichting $J \wedge B \ \Rightarrow \ vf \geq 0$ wordt voldaan omdat J het conjunct $k \leq n$ bevat.

Stap 4. Body:

$$\begin{array}{l} \quad \{ \ J \ \wedge \ B \ \wedge \ vf = V \ \} \\ \quad \{ \ 1 \leq k \leq n \ \wedge \ x = L(k) \ \wedge \ y = E(k) \ \wedge \ k \neq n \ \wedge \ n - k = V \ \} \\ \qquad (* \ \text{recurrente betrekking voor } E\text{, rekenen} \ *) \\ \quad \{ \ 1 \leq k < n \wedge x = L(k) \wedge y \textbf{ max } a[k] = E(k+1) \wedge n - k = V \ \} \\ y := y \textbf{ max } a[k] \\ \quad \{ \ 1 \leq k < n \ \wedge \ x = L(k) \ \wedge \ y = E(k+1) \ \wedge \ n - k = V \ \} \\ \qquad (* \ \text{recurrente betrekking voor } L\text{, rekenen} \ *) \\ \quad \{ \ 1 \leq k+1 \leq n \ \wedge \ x \textbf{ max } (y - b[k]) = L(k+1) \\ \qquad \wedge \ y = E(k+1) \ \wedge \ n - (k+1) < V \ \} \\ x := x \textbf{ max } (y - b[k]) \\ \quad \{ \ 1 \leq k+1 \leq n \wedge x = L(k+1) \wedge y = E(k+1) \wedge n - (k+1) < V \ \} \\ k := k + 1 \\ \quad \{ \ 1 \leq k \leq n \ \wedge \ x = L(k) \ \wedge \ y = E(k) \ \wedge \ n - k < V \ \} \\ \quad \{ \ J \ \wedge \ vf < V \ \} \ . \end{array}$$

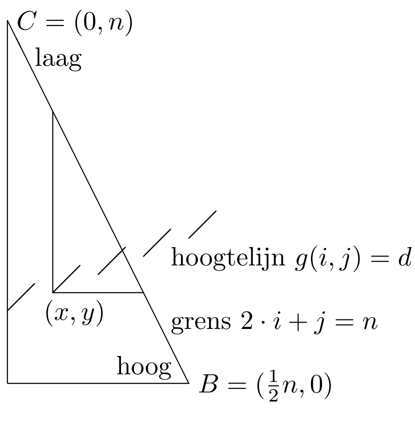
Stap 5. Samenvatting:

$$
\begin{array}{l}
\quad \{\ P : n \geq 1\ \} \\
k := 1\ ;\ x := a[0] - b[0]\ ;\ y := a[0]\ ; \\
\quad \{\ J :\ 1 \leq k \leq n\ \wedge\ x = L(k)\ \wedge\ y = E(k)\ \} \\
\textbf{while}\ k \neq n\ \textbf{do} \quad (*\ \text{vf} : n - k\ *) \\
\quad y := y\ \textbf{max}\ a[k]\ ; \\
\quad x := x\ \textbf{max}\ (y - b[k])\ ; \\
\quad k := k + 1 \\
\textbf{end} \\
\quad \{\ Q : x = L(n)\ \}\ .
\end{array}
$$

Opgave 3 (46 %). Gegeven is een functie $g : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ die zwak stijgend is in zijn eerste argument en zwak dalend is in zijn tweede argument. Gegeven zijn verder constanten $n : \mathbb{N}$ en $d : \mathbb{R}$.

Bepaal een commando ter bepaling van het aantal paren $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ met $i \geq 0$ en $j \geq 0$ en $2 \cdot i + j < n$ en $g(i, j) < d$.
(a: 4 %) Maak een schets van het te onderzoeken gebied, rekening houdend met de gegeven ongelijkheden. Geef aan waar berg en dal liggen, hoe de hoogtelijn loopt, en waar je het resterende zoekgebied legt.
(b: 22 %) Definieer een functie waar het gevraagde aantal mee berekend kan worden. Bepaal recurrente betrekkingen voor deze functie, inclusief basisgeval(len).
(c: 4 %) Geef een formele specificatie voor het bedoelde commando.
(d: 16 %) Bepaal een correct commando voor dit probleem, met een tijdscomplexiteit $\mathcal{O}(n)$.

Uitwerking. (a) Het zoekgebied is een rechthoekige driehoek in het eerste kwadrant met de rechthoekszijden langs de assen en een schuine zijde van $B = (\frac{1}{2}n, 0)$ naar $C = (0, n)$ (de schuine zijde valt net buiten het zoekgebied). De berg ligt in B, het dal in C. De hoogtelijn van d gaat van ZW naar NO. Gevraagd is het aantal punten binnen het zoekgebied ten noorden van de hoogtelijn. We leggen het resterend zoekgebied ten noordoosten van het huidige punt (x, y).



We definiëren dus

(b) $\qquad F(x, y) = \#\{(i, j) \mid i, j : x \leq i \wedge y \leq j \wedge 2 \cdot i + j < n \wedge g(i, j) < d\}\ .$

Gevraagd is $F(0, 0)$. Wegens leeg domein geldt

(basis) $\qquad n \leq 2 \cdot x + y\ \Rightarrow\ F(x, y) = 0\ .$

Om het zoekgebied te verkleinen moeten we x of y verhogen. Allereerst verhogen we x:

$$
\begin{array}{ll}
& F(x,y) \\
= & \{\ i = x \text{ of } x+1 \le i\text{; splitsen }\} \\
& F(x+1,y) + \#\{(x,j) \mid j : y \le j \wedge 2\cdot x + j < n \wedge g(x,j) < d\} \\
= & \{\ g(x,j) \text{ is zwak dalend in } j\text{, dus } g(x,j) \le g(x,y) \text{ voor } j \ge y. \\
& \quad \textbf{Stel } g(x,y) < d. \text{ Dan is } g(x,j) < d \text{ voor alle } j \ge y.\ \} \\
& F(x+1,y) + \#\{(x,j) \mid j : y \le j < n - 2\cdot x\} \\
= & \{\ \textbf{Stel } \ 2\cdot x + y \le n. \text{ Tellen. }\} \\
& F(x+1,y) + n - 2\cdot x - y \ .
\end{array}
$$

We verhogen ook y:

$$
\begin{array}{ll}
& F(x,y) \\
= & \{\ j = y \text{ of } y+1 \le j\text{; splitsen }\} \\
& F(x,y+1) + \#\{(i,y) \mid i : x \le i \wedge 2\cdot i + y < n \wedge g(i,y) < d\} \\
= & \{\ g(i,y) \text{ is zwak stijgend in } i\text{, dus } g(i,y) \ge g(x,y) \text{ voor } i \ge x. \\
& \quad \textbf{Stel } g(x,y) \ge d. \text{ Dan is } g(i,y) \ge d \text{ voor alle } i \ge x. \\
& \quad \text{Tellen geeft 0. }\} \\
& F(x,y+1) \ .
\end{array}
$$

We hebben aldus de recurrente betrekkingen:

(RBx) $\quad g(x,y) < d \ \wedge\ 2\cdot x + y \le n \ \Rightarrow\ F(x,y) = F(x+1,y) + n - 2\cdot x - y$,
(RBy) $\quad g(x,y) \ge d \ \Rightarrow\ F(x,y) = F(x,y+1)$.

Alternatief. Je zou de opgave ook kunnen oplossen met de functie

$$F'(x,y) = \#\{(i,j) \mid i,j : 0 \le i < x \wedge 0 \le j < y \wedge 2\cdot i + j < n \wedge g(i,j) < d\} \ ,$$

maar de recurrente betrekkingen zijn dan veel lastiger.
(c) Specificatie.

$$
\begin{array}{l}
\textbf{var } z : \mathbb{Z} \\
\quad \{\ P : Z = F(0,0)\ \} \\
S \\
\quad \{\ Q : Z = z\ \} \ .
\end{array}
$$

(d) **Stap 1.** We gebruiken gehele hulpvariabelen x en y met invariant en guard volgens

$$
\begin{array}{ll}
J : & Z = z + F(x,y) \ , \\
B : & 2\cdot x + y < n \ .
\end{array}
$$

Aan de bewijsverplichting $J \wedge \neg B \ \Rightarrow\ Q$ wordt voldaan wegens

$$
\begin{array}{ll}
& J \ \wedge\ \neg B \\
\equiv & \{\ \text{definities } J \text{ en } B\ \} \\
& Z = z + F(x,y) \ \wedge\ n \le 2\cdot x + y \\
\Rightarrow & \{\ \text{(basis) en rekenen }\} \\
& Q : Z = z \ .
\end{array}
$$

Stap 2. Initialisatie:

$$
\begin{array}{l}
\quad \{\ P : Z = F(0,0)\ \} \\
\quad \{\ Z = 0 + F(0,0)\ \} \\
z := 0\ ;\ x := 0\ ;\ y := 0 \\
\quad \{\ J : Z = z + F(x,y)\ \} \ .
\end{array}
$$

Stap 3. In verband met de guard kiezen we $vf = n - 2\cdot x - y$. De bewijsverplichting $J \wedge B \ \Rightarrow\ vf \ge 0$ geldt wegens de guard B.

Stap 4. Body:

$$
\begin{array}{l}
\quad \{\ J \wedge B \wedge \mathrm{vf} = V\ \} \\
\quad \{\ Z = z + F(x,y)\ \ \wedge\ \ 2 \cdot x + y < n\ \ \wedge\ \ n - 2 \cdot x - y = V\ \} \\
\textbf{if}\ \ g(x,y) < d\ \ \textbf{then} \\
\qquad \{\ Z = z + F(x,y)\ \ \wedge\ \ 2 \cdot x + y < n\ \ \wedge\ \ n - 2 \cdot x - y = V \\
\qquad\quad \wedge\ \ g(x,y) < d\ \} \\
\qquad\quad\ (*\ \ \text{(RBx) en rekenen}\ \ *) \\
\qquad \{\ Z = z + n - 2 \cdot x - y + F(x+1,y)\ \ \wedge\ \ n - 2 \cdot (x+1) - y < V\ \} \\
\quad z := z + n - 2 \cdot x - y \\
\qquad \{\ Z = z + F(x+1,y)\ \ \wedge\ \ n - 2 \cdot (x+1) - y < V\ \} \\
\quad x := x + 1 \\
\qquad \{\ J \wedge \mathrm{vf} < V :\ Z = z + F(x,y)\ \ \wedge\ \ n - 2 \cdot x - y < V\ \} \\
\textbf{else} \\
\qquad \{\ Z = z + F(x,y)\ \ \wedge\ \ 2 \cdot x + y < n\ \ \wedge\ \ n - 2 \cdot x - y = V \\
\qquad\quad \wedge\ \ g(x,y) \geq d\ \} \\
\qquad\quad\ (*\ \ \text{(RBy) en rekenen}\ \ *) \\
\qquad \{\ Z = z + F(x,y+1)\ \ \wedge\ \ n - 2 \cdot x - (y+1) < V\ \} \\
\quad y := y + 1 \\
\qquad \{\ J \wedge \mathrm{vf} < V :\ Z = z + F(x,y)\ \ \wedge\ \ n - 2 \cdot x - y < V\ \} \\
\textbf{end}\ \ \ (*\ \ \text{verzamelen}\ \ *) \\
\quad \{\ J \wedge \mathrm{vf} < V \}\ \ .
\end{array}
$$

Stap 5. Samenvatting:

$$
\begin{array}{l}
\quad \{\ P : Z = F(0,0)\ \} \\
z := 0\ ;\ x := 0\ ;\ y := 0 \\
\quad \{\ J : Z = z + F(x,y)\ \} \\
\textbf{while}\ 2 \cdot x + y < n\ \ \textbf{do}\ \ \ (*\ \ \mathrm{vf} : n - 2 \cdot x - y\ \ *) \\
\quad \textbf{if}\ \ g(x,y) < d\ \ \textbf{then} \\
\qquad z := z + n - 2 \cdot x - y\ ; \\
\qquad x := x + 1 \\
\quad \textbf{else} \\
\qquad y := y + 1 \\
\quad \textbf{end} \\
\textbf{end} \\
\quad \{\ Q : Z = z\ \}\ \ .
\end{array}
$$