

Uitwerking Toets Programmacorrectheid, 1 maart 2010

Tijdsduur 2 uur. Gesloten boek. Geef voor alle commando's correcte en volledige annotaties.

Opgave 1 (15 %). Gegeven zijn programmavariabelen $n, t : \mathbb{Z}$.
Bepaal één geannoteerde toekenning S die voldoet aan

$$S \quad \begin{array}{l} \{n = X - Y \wedge t = X - 3\} \\ \{n = X - Y \wedge t = Y\} . \end{array}$$

Uitwerking.

$$\begin{array}{l} \{n = X - Y \wedge t = X - 3\} \\ \quad (* Y = X - n = t + 3 - n *) \\ \{n = X - Y \wedge t + 3 - n = Y\} \\ t := t + 3 - n ; \\ \{n = X - Y \wedge t = Y\} . \end{array}$$

Merk op, dat er één toekenning gevraagd wordt. Een commando dat meer toekenningen nodig heeft, is dus niet goed.

Opgave 2 (35 %). Gegeven is de programmavariabele $n : \mathbb{Z}$.
Bepaal een geannoteerd conditioneel commando U dat voldoet aan

$$U \quad \begin{array}{l} \{X \geq 0 \wedge (n = 2 \cdot X + 5 \vee 2 \cdot n = 9 - X)\} \\ \{n = X\} . \end{array}$$

Uitwerking.

$$\begin{array}{l} \{X \geq 0 \wedge (n = 2 \cdot X + 5 \vee 2 \cdot n = 9 - X)\} \\ \quad (* \text{ logica en rekenen } *) \\ \{P' : n = 2 \cdot X + 5 \geq 5 \vee 2 \cdot n = 9 - X \leq 9\} \\ \text{if } n \geq 5 \text{ then} \\ \quad \{P' \wedge n \geq 5\} \\ \quad \quad (* \text{ tweede disjunct van } P' \text{ vervalt wegens } 2 \cdot n \leq 9 *) \\ \quad \{n = 2 \cdot X + 5 \geq 5\} \\ \quad \quad (* \text{ rekenen } *) \\ \quad \{(n - 5) \text{ div } 2 = X\} \\ \quad n := (n - 5) \text{ div } 2 ; \\ \quad \{Q : n = X\} \\ \text{else} \\ \quad \{P' \wedge n < 5\} \\ \quad \quad (* \text{ eerste disjunct van } P' \text{ vervalt wegens } n \geq 5 *) \\ \quad \{2 \cdot n = 9 - X \leq 9\} \\ \quad \quad (* \text{ rekenen } *) \\ \quad \{9 - 2 \cdot n = X\} \\ \quad n := 9 - 2 \cdot n ; \\ \quad \{Q : n = X\} \\ \text{end } \quad (* \text{ verzamel de takken } *) \\ \{Q : n = X\} . \end{array}$$

Veelal ontbrak de argumentatie, dat de **then** tak de preconditionie $n = 2 \cdot X + 5$ heeft en de **else** tak de preconditionie $2 \cdot n = 9 - X$. Het gaat er in de **then** tak niet om, dat $n \geq 5$ correspondeert met het eerste disjunct. Het punt is dat $n \geq 5$ strijdig is met het tweede disjunct. Analoog voor de **else** tak.

Opgave 3 (50 %). De functie $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ is gegeven door de recurrente betrekkingen:

$$\begin{aligned} f(n) &= 0 \quad \text{als } n < 0, \\ f(n) &= n - 2 \cdot f(n - 7) \quad \text{als } n \geq 0. \end{aligned}$$

Bepaal een commando T dat voldoet aan

$$\begin{aligned} &\mathbf{var} \ k, x : \mathbb{Z} ; \\ &\{P : X = f(k)\} \\ T & \\ &\{Q : X = x\} . \end{aligned}$$

Gebruik hiertoe een hulpvariabele $y : \mathbb{Z}$ en een herhaling met de invariant

$$J : \quad X = x + y \cdot f(k) .$$

Voer het volledige stappenplan uit. Geef bij de stappen 1 en 3 geannoteerde lineaire bewijzen.

Uitwerking. Merk op, dat functie f niet in het programma mag voorkomen. Anders was de lus niet nodig en konden we volstaan met de toekenning $x := f(k)$.

Stap 1. Finalisatie. In verband met de definitie van f kiezen we

$$\begin{aligned} J : \quad X &= x + y \cdot f(k) , \\ B : \quad k &\geq 0 . \end{aligned}$$

Aan de bewijsverplichting $J \wedge \neg B \Rightarrow Q$ wordt voldaan wegens

$$\begin{aligned} &J \wedge \neg B \\ \equiv &\{ \text{definitie } J \text{ en } B, \text{ uitwerking ontkenning} \} \\ &X = x + y \cdot f(k) \wedge k < 0 \\ \Rightarrow &\{ \text{definitie van } f \text{ en rekenen} \} \\ &Q : X = x . \end{aligned}$$

Er wordt een lineair geannoteerd bewijs gevraagd, maar ook als dat niet het geval was, zou ik hier de voorkeur aan geven.

Stap 2. Initialisatie.

$$\begin{aligned} &\mathbf{var} \ k, x, y : \mathbb{Z} ; \\ &\{ P : X = f(k) \} \\ &\quad (* \text{ rekenen } *) \\ &\{ X = 0 + 1 \cdot f(k) \} \\ x &:= 0 ; \\ &\{ X = x + 1 \cdot f(k) \} \\ y &:= 1 ; \\ &\{ J : \quad X = x + y \cdot f(k) \} \end{aligned}$$

Stap 3. We kiezen $vf = k$. Er geldt $J \wedge B \Rightarrow vf \geq 0$ wegens

$$\begin{aligned} &J \wedge B \\ \Rightarrow &\{ \text{definitie } B, \text{ weglaten } J \} \\ &k \geq 0 \\ \equiv &\{ \text{definitie } vf \} \\ &vf \geq 0. \end{aligned}$$

Er wordt een lineair geannoteerd bewijs gevraagd. Het argument dat B zegt dat $k \geq 0$ is, is dus niet voldoende.

Stap 4. Body van de lus.

$$\begin{aligned} & \{ J \wedge B \wedge vf = V \} \\ & \{ X = x + y \cdot f(k) \wedge k \geq 0 \wedge k = V \} \\ & \quad (* \text{ definitie } f; \text{ de haakjes zijn echt nodig! } *) \\ & \{ X = x + y \cdot (k - 2 \cdot f(k - 7)) \wedge k \geq 0 \wedge k = V \} \\ & \quad (* \text{ rekenen: distributiviteit en aftrekken } *) \\ & \{ X = x + y \cdot k - y \cdot 2 \cdot f(k - 7) \wedge k - 7 < V \} \\ x & := x + y \cdot k ; \\ & \{ X = x - y \cdot 2 \cdot f(k - 7) \wedge k - 7 < V \} \\ y & := -y \cdot 2 ; \\ & \{ X = x + y \cdot f(k - 7) \wedge k - 7 < V \} \\ k & := k - 7 ; \\ & \{ J \wedge vf < V : X = x + y \cdot f(k) \wedge k < V \} . \end{aligned}$$

Stap 5. Samenvatting.

$$\begin{aligned} & \{ P : X = f(k) \} \\ x & := 0 ; \\ y & := 1 ; \\ & \{ J : X = x + y \cdot f(k) \} \\ \mathbf{while} \quad k \geq 0 \quad \mathbf{do} \quad & (* vf = k *) \\ & x := x + y \cdot k ; \\ & y := -y \cdot 2 ; \\ & k := k - 7 ; \\ \mathbf{end} \\ & \{ Q : X = x \} . \end{aligned}$$